多値論理関数の合成について (多値論理およびその応用 II)

藤田, 米春; 北橋, 忠宏; 田中, 幸吉

数理解析研究所講究録
140巻 1972年 89-110

多値論理関数の合成について

藤田米春　北橋忠宏　田中幸吉

大阪大学基礎工学部情報工学科

あらまし　　多値論理関数に関して、その完全性[1]や、簡単化[2]あるいは、代数的性質[3]について、多くの事が研究されて来た。しかし、多値論理関数の性質について、知られていない事は、まだ、数多くある。

本論文において、筆者らは、関数の合成を表現する一つの手法として、一般的なFeed Forward 回路を考え、それに、関連した関数の代数的性質のいくつかを明らかにした。

まず、合成の一般形としての Feed Forward 回路を定義し、それらの集合における演算を適当に定義する事により、合成の集合が、その演算に関して、monoid になる事を示した、又、その monoid に、同値関係を考える事により、論理関数の能力の1つの示標との関係を与えた。さらに、2値論理関数における、双対の拡張である関数間の準同型および、同型を定義し、それと完全性との関係及び、上に述べた同値関係による合成の集合の同値類別との関係について、2,3の基本的な性質を明らかにした。

1 定義

通常、論理学における、真理値の集合Tは、ある代数的構造を持っている。そして、その構造は、ある実際的な意味を持っている。例えば、Fuzzy Logic における真理値の集合[0, 1]は、0から1までの、実数の集合で、1つの、線型順序集合である。その値の大きさは、ある事象の、もっともらしさの程度を与えている。このような構造を持った集合の上で、$max(x, y)$ とか、$min(x, y)$ などの、論理関数が考察される。

本稿においては、論理関数を、より一般的にあつかうために、真理値の集合に、代数的構造を与えずに、単なる集合と考える。そして、その上に定義される関数の性質が、その論理系の代数構造を決めると考える。

合成についても、個々の論理関数についての合成を考えるのではなく、Feed Forward 回路に対応する、acyclic な、有向グラフを考え、これを使って、それぞれの関数の合成を表現する。

1.1 論理関数

集合 M が与えられたとき、M の n 直積を M^n で表わす。又、M の元の数(濃度)を、$|M|$ で表わす事にする。

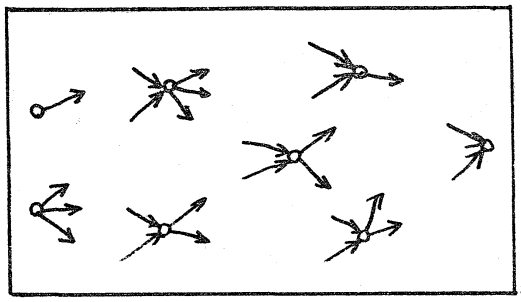
n変数論理関数fを $f; M^n \longrightarrow M$ なる写像で定義する。本稿においては、$n=2$, $|M| \geq 2$ の場合を考える。そのとき、$f; M^2 \longrightarrow M$ を$f(x,y)$ とも書く。

さて、普通、論理回路を設計する場合、使用し得る素子の種類は、限られている。すなわち、使用可能な、論理関数の集合が、きまっているという事である。したがって、この集合の元の組み合せにより、必要とされる論理関数を構成しなければならない。 このように、論理回路の設計の問題は、最初に与えられる、関数の集合が決めるのである。 その意味で、与えられた論理関数の集合 F と、その元が作用する集合すなわち、真理値の集合Mとを1組として、(F, M)と表わし、論理関数系(Logical Function System)と呼ぶ事にする。

1.2 合成

Cを、k+2 個の節点を持った、acyclicな有向グラフとする。 そして、Cは、次のような条件を満たすものとする。まず、k+2 個の節点の内、2個は、indegree が0である。その2個を除く、すべての節点は、indegree 2を持つ。さらに、indegree 2であるような節点の内、ただ1個、outdegree が0のものがある。その他の節点は、すべて、

outdegree が1以上である。



このようなグラフ C の indegree 0 の節点以外の節点に、2入力の素子を、あてはめる事により、1つの Feed Forward 回路が得られる。　2入力素子に対応する、2変数関数を $f(x, y)$ とし、上のような操作を、$Cf(x, y)$ 又は、簡単に、Cf と表わす事にする。　$Cf(x, y)$ は、indegree 0 の節点を入力変数とする、1つの2変数関数となっている。したがって、2変数論理関数すべての集合を F_2 とすると、C は、F_2 上の変換となっている。　さて、このようなグラフ、C で、$k = 1, \cdots, n$ なるものすべての集合を $\mathcal{C}_2^n$ で、表わす事にする。又、C が与えられたとき、その節点の数から、2を引いたものを $\nu(C)$ と表わす事にする。

<u>定義 1</u>　$f; M^2 \to M$ とし、$C_1, C_2 \in \mathcal{C}_2^n$ が存在して、

$C_1 f = C_2 f$　のとき、C_1 と C_2 は、f-同値 であると言い

$C_1 \underset{=}{f} C_2$ と表わす。

定義より、関係"$\underset{=}{f}$"が、同値関係である事は明らかである。$\mathbb{C}_2^n$ の、同値関係"$\underset{=}{f}$"による商集合を $\mathbb{C}_2^n/f$ と表わす。$\mathbb{C}_2^n$ の定義および、"$\underset{=}{f}$"の定義から、f を、n 個以下使用して Feed Forward 回路により合成できる、2変数関数の数を $N(f^n)$ とすれば、$N(f^n)=|\mathbb{C}_2^n/f|$ である事も、明らかである。

1.3 準同型

$f; M^2 \to M$, $g; M'^2 \to M'$, $\alpha; M \to M'$ とする。このとき、任意の $(x,y) \in M^2$ について、

$$\alpha f(x,y) = g(\alpha x, \alpha y) \qquad \text{-----①}$$

が成り立つ時、f は g に、準同型写像 α を持つと言う。①の関係を簡単に、$\alpha f = g\alpha$ と表わす事もある。

<u>定義 2</u>　$(\{f\}, M)$ と $(\{g\}, M')$ とがあって、$\alpha; M \to M'$ により、$\alpha f = g\alpha$ が成り立ち、α が onto であるとき、$(\{f\}, M)$ は、$(\{g\}, M')$ に準同型であると言い、

$$(\{f\}, M) \overset{\alpha}{\simeq} (\{g\}, M') \qquad \text{----②}$$

と表わす。特に、α が、1対1, onto のとき、同型であると言い、

$$(\{f\}, M) \approxeq (\{g\}, M') \qquad \text{----} ③$$

と表わす。

定義2は、2値論理関数における双対な関数の、拡張である。論理関数の準同型の例を次に示す。

<u>例 1</u>

	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	3	3	2	1
3	2	2	2	1
4	1	1	1	1

$A(x, y)$

	1	2
1	2	1
2	1	1

$NOR(x, y)$

1	2	3	4
1	1	2	2

$\alpha(x)$

$$\alpha A(x, y) = NOR(\alpha x, \alpha y)$$

次に、定義2を一般の場合に、拡張したものを示す。

<u>定義 3</u>　(F, M) と、(G, M') とがあって、$|F| = |G|$ かつ、全射 $\alpha ; M \longrightarrow M'$ が存在して、任意の $f \in F$ について、$\alpha f = g \alpha$ なる $g \in G$ が存在して、かつ、この対応が、1対1であるとき、(F, M) は、(G, M') に準同型であると言い、$(F, M) \simeq (G, M')$ と書く。又、α が1対1なら同型であると言い、$(F, M) \approxeq (G, M)$ と書く。

論理関数系の準同型の例を次に示す。

例 2

$$L_C=(\{f_1(x,y)=\max(x,y),\ f_2(x,y)=\min(x,y),\ f_3(x)=1-x\},\ [0,1])$$

$$L_3=(\{g_1(x,y)=\max(x,y),\ g_2(x,y)=\min(x,y),\ g_3(x)=1-x\},\ \{0,\tfrac{1}{2},1\})$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}[0,\frac{1}{2}) & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2},1] \\ 0 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

$$L_C \xrightarrow{\alpha} L_3$$

次に、論理関数集合の能力の１つである完全性についての定義を与える。

定義 4　２変数関数の集合Fが、完全であるとは、Fの元の合成により、任意の２変数関数がつくれる事である。

$C_1, C_2 \in \mathfrak{C}_2^n$ について、$C_2; F_2 \to F_2$, $C_1; F_2 \to F_2$ だから、合成の積 $(C_2C_1)f$ を、$C_2(C_1f)$ で定義すれば、$C_2C_1; F_2 \to F_2$ となる。そこで、$\mathfrak{C}_2^n$ に、その元の積をつけ加えたものを $\overline{\mathfrak{C}_2^n}$ とすれば、$\overline{\mathfrak{C}_2^n}$ は、この積に関して閉じている。

2　合成および準同型の性質

定理 1　$\overline{\mathcal{C}_2^n}$ は、monoid である。

証明　$\overline{\mathcal{C}_2^n}$ が半群をなす事は、$\overline{\mathcal{C}_2^n}$ の元が、F_2 の上の変換である事から明らかである。$\overline{\mathcal{C}_2^n}$ が、単位元を、持つ事を示す。$\mathcal{C}_2^n \subset \overline{\mathcal{C}_2^n}$ の元で $\nu(C)=1$ となるものを考えれば、そのようなCは2コある。1個は、$ef(x,y)=f(x,y)$ なる e である。この e は任意の $f \in F_2$ について、$ef=f$ であるので、任意の C について、$Cef=eCf=Cf$ すなわち、e は単位元である。

さて、$\overline{\mathcal{C}_2^n}$ は、$F_2 \to F_2$ なる変換の集合であるから、任意の $C \in \overline{\mathcal{C}_2^n}$ に対して、1つの F_2 上の変換半群の元

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_i & \cdots & f_{m^{m^2}} \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_i' & \cdots & f_{m^{m^2}}' \end{pmatrix} \qquad (f_i, f_i' \in F_2;\ i=1,\cdots,m^{m^2})$$

が対応している。Cに対応する変換半群の元をCの表現と呼ぶ事にし、$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots \\ f_1' & f_2' & \cdots \end{pmatrix}$ が、Cの表現である事を

$$C \sim \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{m^{m^2}} \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_{m^{m^2}}' \end{pmatrix}$$

とあらわす事にすると、同値関係 $C_1 \doteq C_2$ は、その表現において、

$$C_1 \sim \begin{pmatrix} f & \\ f' & A \end{pmatrix} \quad , \quad C_2 \sim \begin{pmatrix} f & \\ f' & B \end{pmatrix}$$

のようになっている事を表わしている。又、単位元eは

$$e \sim \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_i & \cdots & f_{m^{m^2}} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_i & \cdots & f_{m^{m^2}} \end{pmatrix}$$

となる。 eにf-同値な合成C_e は

$$C_e \sim \begin{pmatrix} f & \\ f & A \end{pmatrix} \quad .$$

のようになっている。

次に、準同型と、合成及び、完全性との関係について、考察する。

<u>定理 2</u>　$\alpha f = g\alpha$ ならば、任意の$C \in \mathcal{C}_2^n$ について、$\alpha C f = C g \alpha$ が成り立つ。

<u>証明</u>、　$\alpha f(x, y) = g(\alpha x, \alpha y)$ ----④

今、ある $F(x, y), G(x', y')$ について、

$$\alpha F(x, y) = G(\alpha x, \alpha y) \qquad \text{----⑤}$$

が成り立つとすると、③により、

$$\alpha F(f(x, y), y) = G(\alpha f(x, y), \alpha y)$$
$$= G(g(\alpha x, \alpha y), \alpha y)$$
$$\alpha F(x, f(x, y)) = G(\alpha x, \alpha f(x, y))$$

$$= G(\alpha x, g(\alpha x, \alpha y))$$

$$\alpha F(f(x,y), f(x,y)) = G(\alpha f(x,y), \alpha f(x,y))$$

$$= G(g(\alpha x, \alpha y), g(\alpha x, \alpha y))$$

したがって、定理が成り立つ。

定理 3　$(\{f\}, M) \simeq_\alpha (\{g\}, M')$ かつ、α が単射でないならば、f は完全でない。

証明　$\alpha f(x,y) = g(\alpha x, \alpha y)$ であるから、$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M^2$ および、$i, j \in M'$ が存在して、$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ かつ $i \neq j$ で、$x_1, x_2 \in \alpha^{-1}(i)$, $y_1, y_2 \in \alpha^{-1}(j)$ が成り立つ。したがって

$$f(x_1, y_1) \in \alpha^{-1}(g(i,j))$$

$$f(x_2, y_2) \in \alpha^{-1}(g(i,j))$$

すなわち、x_1, x_2 が同じ類、y_1, y_2 が同じ類であってかつ、$f(x_1, y_1)$ と $f(x_2, y_2)$ とが異なる類にはいっている関数をつくれない。

定理 4　$(\{f\}, M)$ が $(\{g\}, M')$ に準同型写像 α を持ち、α が M' の中への写像であるとき、g は完全でない。

証明　$x', y' \in \alpha(M)$ なる $(x', y') \in M'^2$ について、$\alpha x = x'$, $\alpha y = y'$ であるような、$x, y \in M$ があって

$$g(x', y') = \alpha f(x,y) \in \alpha(M)$$

すなわち、$g(x,y)$ は、$\alpha(M)$について、閉じている。

<u>定理 5</u>　$(\{f\},M)\overset{\alpha}{\approx}(\{g\},M')$ ならば、fもgも完全か、どちらでも完全でないかのどちらかである。

証明略

<u>定理 6</u>　定理5において、さらに、$\beta\,(\neq\alpha)$ が存在して $(\{f\},M)\overset{\beta}{\approx}(\{g\},M')$ ならば、fもgも完全でない。

<u>証明</u>　仮定より、

$$\alpha f(x,y)=g(\alpha x,\alpha y) \qquad \text{----⑥}$$

$$\beta f(x,y)=g(\beta x,\beta y) \qquad \text{----⑦}$$

⑦より、$f(x,y)=\beta^{-1}g(\beta x,\beta y)$

⑥に代入して

$$\alpha\beta^{-1}g(\beta x,\beta y)=g(\alpha x,\alpha y)$$

$\beta x=x'$ とおいて、$\alpha\beta^{-1}=\gamma$ とおけば、

$$\gamma g(x',y')=g(\gamma x',\gamma y')$$

故に、gは自己同型関数である。

定理2 により、準同型性は合成により保存されるから任意の $C\in\mathcal{C}_2^n$ について、

$$\gamma Cg(x',y')=Cg(\gamma x',\gamma y')$$

すなわち、gの合成は、すべて自己同型関数となり、

gは完全でない。したがって、また、fも完全でない。

本定理の対偶は、fが完全で、$(\{f\},M)\overset{\alpha}{\simeq}(\{g\},M')$ ならは、αは、一意に定まる事を示している。 3値2変数の自己同型関数の例を次に示す。

<u>例</u>

f	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

により $\alpha f(x,y)=f(\alpha x,\alpha y)$

定理3、4から、ただちに、次の系が、みちびかれる。

<u>系 1</u>　$(\{f\},M)$が$(\{g\},M')$に、準同型写像 α を持ち、$|\alpha(M)|\geqq 2$ かつ、αが M' の中への写像ならば、fもgも完全でない。

定理3を $|F|\geqq 1$ の場合に拡張したものが次の定理7である

<u>定理 7</u>　$(F,M)\overset{\alpha}{\simeq}(G,M')$ で、αが単射でないならば、Fは、完全でない。

証明略

定理7から、例2のL_cが完全でない事がわかる。

以上は、完全性と準同型，同型との関係について考察したものであるが、次に、合成の同値類と準同型，同型の関係について、考えて見よう。　ここでは、$|F|=1$ の場合を考える。

<u>定理 8</u>　$(\{f\},M)\overset{\alpha}{\Rightarrow}(\{g\},M')$ とすると。任意の $C_1,C_2\in\mathcal{C}_2^n$ について、$C_1\overset{f}{=}C_2$ ならば、$C_1\overset{g}{=}C_2$ である。

<u>証明</u>　$C_1f=C_2f$ とすると 仮定および、定理2より，

$$\alpha C_1f(x,y)=C_1g(\alpha x,\alpha y)$$

$$\alpha C_2f(x,y)=C_2g(\alpha x,\alpha y)$$

故に、　$C_1g(\alpha x,\alpha y)=C_2g(\alpha x,\alpha y)$

αは全射であるから，(x,y) がM^2 のすべての点を動くとき、$(\alpha x,\alpha y)$ も M'^2 のすべての点を動く、したがって任意の $(x',y')\in M'^2$ について，

$$C_1g(x',y')=C_2g(x',y')$$

すなわち　$C_1\overset{g}{=}C_2$

定理8は、$\mathcal{C}_2^n/f$ が $\mathcal{C}_2^n/g$ の細類別になっている事を示している。　定理8の逆すなわち、$C_1\overset{f}{=}C_2$なるば $C_1\overset{g}{=}C_2$ が成り立つとき、$(\{f\},M)\overset{\alpha}{\Rightarrow}(\{g\},M')$ なるαが存在する、という事は、成り立たない。それは、次の例から明らかである。

例 3 　$M(x,y)$ 　　　　$S(x',y')=const$

$(x',y')\in M'^2$

$|M'|>m$

	1	2	3	-----	m
1	1	2	3	----	m
2	2	2	3	----	m
3	3	3	3	----	m
⋮	-------				⋮
m	m	m	m	----	m

上の $M(x,y)$ が、$S(x',y')$ に準同型でない事は、明らかである、ところが、

$$M(M(x,y),y)=M(x,M(x,y))=M(M(x,y),M(x,y))$$
$$=M(M(y,x),y)=M(x,M(y,x))=M(M(y,x),M(x,y))$$
$$=M(x,y)$$

したがって、任意の $C\in\mathcal{C}_2^n$ について、$CM=M$

又、$S(x,y)$ も、任意の $C\in\mathcal{C}_2^n$ について、$CS=S$

つまり、同値関係として、一致する。

定理 9 　$(\{f\},M)\approx(\{g\},M')$ ならば 　$\mathcal{C}_2^n/f=\mathcal{C}_2^n/g$

証明 　定理 8 より任意の $C_1,C_2\in\mathcal{C}_2^n$ について、

$C_1\overset{f}{\equiv}C_2$ ならば、$C_1\overset{g}{\equiv}C_2$

又、$(\{g\},M')\approx^{-1}(\{f\},M)$ であるから、再び定理 8 より、

$C_1\overset{g}{\equiv}C_2$ ならば、$C_1\overset{f}{\equiv}C_2$

故に、　$\mathcal{C}_2^n/f=\mathcal{C}_2^n/g$

定理9の逆も一般には、成り立たない、これは、例3が示すところであるが、$|M|=|M'|$ の場合で、f が完全なら、以下に示すように、$(\{f\},M)\approx(\{g\},M')$ となる。

まず、次の補題から始める。

<u>補題 1</u>　任意の n について、$\mathcal{C}_2^n/f=\mathcal{C}_2^n/g$，$|M|=|M'|$ かつ f が完全ならば、g も完全である。

<u>証明</u>　f が完全であるから、ある n について，

$$\left|\mathcal{C}_2^n/f\right|=m^{m^2} \qquad \text{ただし } m=|M|$$

故に、その n について

$$\left|\mathcal{C}_2^n/g\right|=m^{m^2}$$

故に g も完全である。

補題 1により、次の補題2が得られる。

<u>補題 2</u>　$|M|=|M'|$，$f;M^2\to M$ が完全で、かつ、$g;M'^2\to M'$ との間に、$\mathcal{C}_2^n/f=\mathcal{C}_2^n/g$ が成り立つならば、$Cf=const$ なる $C\in\mathcal{C}_2^n$ について、$Cg=const$ となる。又、$Cg=const$ ならば、$Cf=const$ となる。

<u>証明</u>　C を含む合成の類を $[C]$ とあらわすことにする。

$M=\{1,2,\cdots,k,\cdots,m\}$ とする。

$C_k\in[C_k]$ について $C_kf=k$ とし，

$C_kg=h\neq const$ と仮定しよう。

補題1から、gが完全であるから、$C_1 \in \mathcal{C}_2^n$が存在して、

$$C_1 g = \mathrm{const}.$$

そこで、$C_k g(C_1 g, C_1 g) = h(C_1 g, C_1 g) = \mathrm{const}.$

すなわち、この合成をC_k'とすれば　$C_k' \notin [C_k]$

しかるに　$C_k f = k$　であるから、

$$C_k f(C_1 f, C_1 f) = k$$

したがって　$C_k' \in [C_k]$

これは、矛盾である。　したがって、$(\{f\}, M)$において、定数をつくる合成は、$(\{g\}, M')$においても定数関数をつくる。　$Cg = \mathrm{const}$なら、$Cf = \mathrm{const}$である事の証明もまったく同様である。

補題2を使って、次の定理10が得られる。

<u>定理 10</u>　$f; M^2 \to M$, $g; M'^2 \to M'$, $|M| = |M'|$, fが完全であれば、$\mathcal{C}_2^n/f = \mathcal{C}_2^n/g$が成り立つとき$(\{f\}, M) \approx (\{g\}, M')$が成り立つ。

<u>証明</u>　補題2より、定数の合成は、定数の合成に対応するから、　$x_1, x_2, x_3 \in M$, $u_1, u_2, u_3 \in M'$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}_2^n$

として、　$x_1 = C_1 f$, $x_2 = C_2 f$, $x_3 = C_3 f$　----(イ)

$u_1 = C_1 g$, $u_2 = C_2 g$, $u_3 = C_3 g$　----(ロ)

とする。さらに、

$$x_3 = f(x_1, x_2) \qquad \text{---} (ハ)$$

$$u_3 \neq g(u_1, u_2) \qquad \text{---} (ニ)$$

としよう。 すると(イ)および(ロ)から、

$$x_3 = f(C_1 f, C_2 f)$$

すなわち、この合成を C_3' とすれば、

$$C_3' \in [C_3]$$

しかるに、 $u_3 \neq g(C_1 g, C_2 g)$ であるから、

$$C_3' \notin [C_3]$$

これは矛盾である。したがって、

$$x_3 = f(x_1, x_2) \quad と \quad u_3 = g(u_1, u_2)$$

が対応している。 f が完全であるから、f は、M の任意の元に対応する定数関数を合成できる、したがって、M のすべての点について、一対一対応

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_m \end{pmatrix}$$

により、

$$f(x, y) = \alpha^{-1} g(\alpha x, \alpha y)$$

すなわち、

$$\alpha f(x, y) = g(\alpha x, \alpha y)$$

したがって、

$$(\{f\}, M) \cong (\{g\}, M')$$

さて，一般に論理関数合成において，何らかの意味での最簡合成が問題になる事が多い。ここでは，その中で最も重要な$\nu(C)$が最小すなわち，素子数最小の意味での最簡合成について考える。ふたつの論理関数系に準同型の関係があるとき，共通の最簡合成を持つ事を示すのがつぎの定理11である。

<u>定理 11</u>　$(\{f\},M)\overset{\alpha}{\simeq}(\{g\},M')$で，$\mathfrak{C}_2^n$の元$C$があって$Cg$が$(\{g\},M')$において最簡な表理であれば，$Cf$も$(\{f\},M)$において最簡表現である。

<u>証明</u>　今$C'\in\mathfrak{C}_2^n$について$\nu(C')<\nu(C)$とする，そして

$$C'f(x,y)=Cf(x,y) \qquad \text{--------}\ (1)$$

が成り立つとする。

仮定から　$\alpha f(x,y)=g(\alpha x,\alpha y)$　だから定理2より

$$\alpha Cf(x,y)=Cg(\alpha x,\alpha y) \qquad \text{-----}\ (2)$$

(1)により　$\alpha C'f(x,y)=Cg(\alpha x,\alpha y)$

故に定理2より

$$\alpha C'f(x,y)=C'g(\alpha x,\alpha y)$$

(2)に代入して

$$C'g(\alpha x,\alpha y)=Cg(\alpha x,\alpha y)$$

仮定から$\nu(C')<\nu(C)$　だからCが$(\{g\},M')$における最簡表現であるという仮定に反する。したがってCは$(\{f\},M)$における最簡表現である。

3 結言

本稿において、論理関数の準同型、および、一般的な、合成の定義を行った。これにより、関数の準同型と、完全性とが、どのように、かかわりあうか、明らかとなった。又、同型と、合成の同値類との関係について、基本的な結果を得た。従来、同型という、同値関係により、関数を分類する事は、よく行なわれていたが、それに対して、合成の同値類の面から、関数の同型性を論ずる事が可能になった。又、関数の合成に関して、準同型の関係を利用する事についても考察した。

今後の問題としては、$(\{f\},M)\overset{\alpha}{\Rightarrow}(\{g\},M')$ で、f により、f_1 を合成するとき、$\alpha f_1=g_1\alpha$ なる g_1 を g で合成する合成の類[C] について、調べる事になるが、f_1 が、合成可能かどうかを決定するために、調べなければ、ならない、$\nu(C)$ の上限を定める事(これは、$N(g^n)$ から、$N(f^n)$ の上限を定める事に関係していると思われる。)および、$(\{f\},M)(\{g\},M')$ $|M|>|M'|$ について、関係 $\underline{f}$ による類別が関係 $\underline{g}$ による類別の細類別になっているとき、f と g の間に成り立つ関係を調べる事などがある。

最後に、日頃熱心に、討論し、又、重用な、提案をいただく、本研究室、佐藤 睦 氏に、深謝する。

文 献

(1) 野崎昭弘 "多値論理とオートマトン", 数理解析研究所講究録 81, March, 1970. など多数

(2) C.M.Allen and D.D.Givon, "A Minimization Technique for Multiple-valued Logic Systems," IEEE Trans. on Computers, Feb. 1968 など.

(3) 1) J.D.Swift, "Algebraic Properties of N-Valued Propositional Calculi", The Jounal of Symbolic Logic, Vol. 19, No. 1, March, 1954, PP 45-51
2) Yates A. Keir, "Algebraic Properties of 3-Valued Compositions", IEEE Trans. on E.C. Vol. EC-13 1964 October
3) Corina Reisher and Dan A. Simovici, "Associative Algebraic Structures in the Set of Boolean Functions and Some Applications in Automata Theory" IEEE Trans. on Computer, Vol. C-20, No. 3 March, 1971

(4) 彌永昌吉, 小平邦彦, 現代数学概説 I, 岩波書店, 1968

(5) 三根 久, 古賀義亮, "三値多変数関数における自己同型対応関係および、多値への拡張", オートマトンと自動制御研究会資料, January 1966,